

ELASTİK YARI SONSUZ ORTAM ÜZERİNE OTURAN FARKLI İKİ DÜZ BLOK İLE YÜKLENMİŞ ELASTİK TABAKADA TEMAS PROBLEMİ

Talat Şükrü ÖZŞAHİN

Volkan KAHYA

A. Osman ÇAKIROĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi 61080, Trabzon

ÖZET

Bu çalışmada elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan elastik tabakada temas problemi elastisite teorisi ve integral dönüşüm tekniği kullanılarak çözülmüştür. Dış yükler P ve Q elastik tabakaya genişlikleri farklı iki düz blok yardımıyla aktarılmıştır. Tabaka yüksekliği sabit ve h dır. Temas eden bütün yüzeylerde sürtünme yoktur. Tabakaya ait kütle kuvvetleri dikkate alınmıştır. Problem temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu tekil integral denklem takımına indirgenmiş, sayısal çözüm Gauss-Chebyshev integrasyon formülü yardımıyla yapılmıştır. Elastik tabaka ile elastik yarı sonsuz ortam arasındaki ilk ayrılma yükü (λ_{cr}) ve ilk ayrılma uzaklığı (x_{cr}) yanı sıra, temas yüzeylerindeki gerilme dağılımları belirlenmiştir. Ayrıca bloklar altında ayrılma meydana gelmeden bloklar arasında olabilecek en yakın uzaklık ile iki bloğun etkileşiminin son bulduğu bloklar arasındaki uzaklık da çeşitli boyutsuz büyüklükler için belirlenmiştir.

ABSTRACT

The contact problem for an elastic layer resting on an elastic half plane is considered according to the theory of elasticity with integral transformation technique. External loads P and Q are transmitted to the layer by means of two dissimilar rigid flat punches. Widths of punches are different and the thickness of the layer is h . All surfaces are frictionless and it is assumed that the layer is subjected to uniform vertical body force due to effect of gravity. Problem is reduced to singular integral equations and solved numerically using appropriate Gauss-Chebyshev integration formulas. Initial separation loads, λ_{cr} , initial separation points, x_{cr} , are determined. Also how close two punches can be replaced without causing separation between punches and the layer, is researched and limit distance between punches which ends interaction of punches, is investigated for various dimensionless quantities.

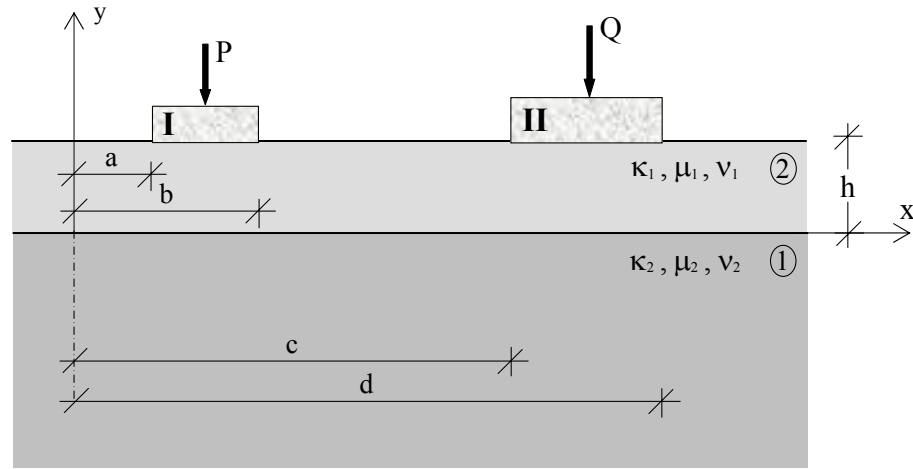
1. GİRİŞ

Mühendislikte pek çok durumda yükler, yapıların farklı elemanları veya bölümleri arasındaki temas ile aktarılır. Temas günlük hayatta çok rastlanan bir olgu olup karayolları,

demiryolları, temeller, tahıl siloları, sıvı tankları gibi mühendislik yapılarında önemli rol oynar.

Elastik yarı sonsuz ortam üzerine oturan kiriş yada plaklarda temas problemleri zemin-yapı etkileşimine örnek oluşturabilecek problemler olduklarından araştırmacıların dikkatini çekmiştir. Bununla birlikte birçok yapı elemanın geometrisine yakın olması nedeniyle rijit yada elastik bir temele oturan uzun tabaka problemi temas mekaniğinde çok çalışılmıştır [1-6]. Daha önce yapılan bazı çalışmalarda kütle kuvvetleri ihmal edilirken [7-10], kütle kuvvetlerinin dikkate alındığı çalışmalar ise [11-14]'de verilmiştir.

Rijit dikdörtgen blok problemlerinin zemin mekaniğinde özellikle temel güvenliğinin araştırılmasında önemli bir yeri vardır. Dikdörtgen bloklar zemin üzerine oturan temeller olarak düşünülebilir.



Şekil 1. Elastik yarı sonsuz ortam üzerine oturan iki farklı düz blok ile yüklenmiş elastik tabaka.

Bu çalışmada, elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan farklı iki düz dikdörtgen blok ile yüklenmiş elastik tabakada temas problemi integral dönüşüm tekniği kullanılarak elastisite teorisine göre çözülmüştür. Bloklar yardımıyla tabakaya aktarılan yükler P ve Q olup $Q \geq P$ olduğu kabul edilmiştir. Blok genişlikleri farklı olabilirken tabaka yüksekliği h sabittir. Tabakaya etkiyen kütle kuvvetinin şiddeti $\rho_1 gh$ dır. ρ_1 , tabakanın yoğunluğu iken g yerçekimi ivmesidir. Bütün yüzeylerde sürtünme yoktur.

Problemın çözümünden elastik tabaka ile elastik yarı sonsuz ortam arasında ayrılmayı meydana getirecek ilk ayrılma yükü ($\lambda_{cr} = P/\rho_1 gh^2$) ve uzaklığı (x_{cr}) yanı sıra temas eden yüzeylerdeki gerilme dağılışı belirlenmiştir. Dış yük şiddetleri, elastik ortamın malzeme özellikleri ile blok genişliklerine de bağlı olarak rijit düz bloklar farklı oturmalar yapabilmekte, bu durum bloklar birbirine çok yakın ise bloklar ile elastik tabaka arasında ayrılmalara sebebiyet vermektedir. Bu çalışmada bloklar ile elastik tabaka arasında ayrılma oluşmadan blokların ne kadar yakın olabilecekleri de araştırılmıştır. Ayrıca iki blok arasındaki etkileşimin bloklar arasındaki hangi uzaklıkta kaybolduğu da belirlenmiştir.

2. PROBLEMİN FORMÜLASYONU VE ÇÖZÜMÜ

Problemın çözümünde Navier denklemlerinden yola çıkılmış, yer değiştirmeler bilinmeyen fonksiyonların Fourier dönüşümleri olarak alınıp Navier denklemlerinde yazılarak bir grup adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Elde edilen bu adi

diferansiyel denklem takımının çözülmesiyle gerilmelere ve yer değiştirmelere ait ifadeler bilinmeyen katsayılar cinsinden bulunmuştur. Bu bilinmeyen katsayılar aşağıdaki sınır şartları yardımıyla bilinmeyen temas gerilmeleri $P(x)$ ve $Q(x)$ ' e bağlı olarak belirlenmiştir.

$$\sigma_{y_1}(x, h) = \begin{cases} -P(x) & a < x < b \\ -Q(x), & c < x < d \\ 0 & -\infty < x < a, b < x < c, d < x < \infty \end{cases}, \quad (1a)$$

$$\tau_{xy_1}(x, h) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1b)$$

$$\tau_{xy_1}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1c)$$

$$\tau_{xy_2}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1d)$$

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = \sigma_{y_2}(x, 0), \quad -\infty < x < \infty, \quad (1e)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_2(x, 0) - v_1(x, 0)] = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1f)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, h)] = 0, \quad a < x < b, \quad (1g)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, h)] = 0, \quad d < x < c, \quad (1h)$$

$P(x)$ ve $Q(x)$ sırasıyla 1. ve 2. blok altındaki bilinmeyen temas gerilmeleridir. Probleme ait denge şartları

$$\int_a^b P(x) dx = P, \quad (2a)$$

$$\int_c^d Q(x) dx = Q. \quad (2b)$$

olarak tanımlanmıştır. Bilinmeyen olan temas gerilmelerinin belirlenebilmesi için (1h) ve (1g) nolu sınır şartları kullanılmıştır. Elde edilen katsayıların bu sınır şartlarında yerlerine konulup gerekli düzenlemelerin yapılması sonucunda

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi\mu_1} \int_a^b \left[k_1(x, t) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{t-x} \right] P(t) dt \\ & -\frac{1}{\pi\mu_1} \int_c^d \left[k_1(x, t) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{t-x} \right] Q(t) dt = 0, \quad a < x < b, \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi\mu_1} \int_a^b \left[k_1(x, t) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{t-x} \right] P(t) dt \\ & -\frac{1}{\pi\mu_1} \int_c^d \left[k_1(x, t) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{t-x} \right] Q(t) dt = 0, \quad c < x < d, \end{aligned} \quad (3b)$$

(3a) ve (3b) nolu eşitlikler ile verilen integral denklem takımı elde edilmiştir. $k_1(x, t)$ integral denklem takımının çekirdeği olup aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$k_1(x,t) = \int_0^\infty \left\{ \left[4\alpha^2 (1+\kappa_1) \left[(1+\kappa_2) \left[-e^{-4\alpha h} + 4\alpha h e^{-2\alpha h} + 1 \right] + \mu_2/\mu_1 (1+\kappa_1) \left[e^{-4\alpha h} - 2e^{-2\alpha h} + 1 \right] \right] \right] / \Delta \right. \right. \\ \left. \left. - (1+\kappa_1)/4 \right\} \sin \alpha(t-x) d\alpha, \quad (4a)$$

$$\Delta = 16\alpha^2 \left\{ (1+\kappa_2) \left[e^{-4\alpha h} + e^{-2\alpha h} (-2 - 4\alpha^2 h^2) + 1 \right] + \mu_2/\mu_1 (1+\kappa_1) \left[-e^{-4\alpha h} + 4\alpha h e^{-2\alpha h} + 1 \right] \right\}. \quad (4b)$$

κ_1 ve μ_1 elastik tabakaya ait malzeme sabitleridir. κ_1 düzlem gerilme halinde $\kappa_1 = (3 - 4\gamma_1)/(1 + \gamma_1)$, düzlem şekil değiştirme halinde de $\kappa_1 = (3 - 4\gamma_1)$ olarak alınmıştır. γ_1 Poisson oranını göstermektedir.

İntegral denklem takımının sayısal çözümü için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanmıştır

$$x_1 = \frac{b-a}{2} r_1 + \frac{b+a}{2}, \quad t_1 = \frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2}, \quad x_2 = \frac{d-c}{2} r_2 + \frac{d+c}{2}, \\ t_2 = \frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2}, \quad g_1(s_1) = P \left(\frac{b-a}{2} s_1 + \frac{b+a}{2} \right) / P/h, \quad (5a-g) \\ g_2(s_2) = Q \left(\frac{d-c}{2} s_2 + \frac{d+c}{2} \right) / P/h, \quad \lambda = P/\rho_1 g h^2,$$

Bu boyutsuz büyüklükler integral denklemlerde ve denge şartlarında yerlerine yazılırlarsa, $g_1(s_1)$ ve $g_2(s_2)$ boyutsuz temas gerilmeleri $s = \pm 1$ de sonsuza gider, dolayısıyla integral denklemlerin indeksleri +1 olur çözümler

$$g_i(s_i) = G_i(s_i)(1 - s_i^2)^{-1/2}, \quad (-1 < s_i < 1), \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

olarak aranır [15,16]. Uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri kullanılacak olursa (2) ve (3) nolu denklemler

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i \frac{b-a}{2h} G_1(s_{1_i}) = 1, \quad (7a)$$

$$\sum_{i=1}^n \pi W_i \frac{d-c}{2h} G_2(s_{2_i}) = Q/P, \quad (7b)$$

$$- \sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1_i}) \frac{b-a}{2h} \left[k_1(r_{1_j}, s_{1_i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{b-a}{2}(s_{1_i} - r_{1_j})} \right] - \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2_i}) \frac{d-c}{2h} \\ \left[k_1(r_{1_j}, s_{2_i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\frac{d-c}{2} s_{2_i} + \frac{d+c}{2} \right) - \left(\frac{b-a}{2} r_{1_j} + \frac{b+a}{2} \right)} \right] = 0, \quad (j = 1, \dots, n-1), \quad (8a)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n W_i G_1(s_{1_i}) \frac{b-a}{2h} \left[k_1(r_{2_j}, s_{1_i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\left(\frac{b-a}{2}s_{1_i} + \frac{b+a}{2}\right) - \left(\frac{d-c}{2}r_{2_j} + \frac{d+c}{2}\right)} \right] \\
& - \sum_{i=1}^n W_i G_2(s_{2_i}) \frac{d-c}{2h} \left[k_1(r_{2_j}, s_{2_i}) + \frac{(1+\kappa_1)}{4} \frac{1}{\frac{d-c}{2}(s_{2_i} - r_{2_j})} \right] = 0, \quad (j=1, \dots, n-1), \quad (8b)
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir [15,16]. Bu ifadelerde geçen s_1, s_2, r_1, r_2 ve W_i

$$W_1 = W_n = \frac{1}{2n-2}, \quad W_i = \frac{1}{n-1}, \quad (i=2, \dots, n-1), \quad (9a)$$

$$s_{1_i} = s_{2_i} = \cos\left(\frac{i-1}{n-1}\pi\right), \quad (i=1, \dots, n), \quad (9b)$$

$$r_{1_j} = r_{2_j} = \cos\left(\frac{2j-1}{2n-2}\pi\right), \quad (j=1, \dots, n-1). \quad (9c)$$

olarak ifade edilmektedir [15,16]. Böylece $G_1(s_{1_i}), G_2(s_{2_i})$ ($i=1, \dots, n$) gibi $2n$ tane bilinmeyen belirlenebilmesi için $2n$ tane denklem (7) ve (8) nolu ifadelerle elde edilmiş olur.

İntegral denklemlerden $P(x)$ ve $Q(x)$ bulunduktan sonra elastik tabaka ile elastik yarı sonsuz ortam arasındaki $\sigma_{y_1}(x,0)$ gerilme dağılışı

$$\sigma_{y_1}(x,0) = -\rho_1 gh - \frac{1}{\pi} \int_a^b k_2(x,t) P(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_c^d k_2(x,t) Q(t) dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (10)$$

bağıntısından elde edilmiştir. $k_2(x,t)$ denklemin çekirdeği olup aşağıdaki gibi belirlenmiştir.

$$k_2(x,t) = \int_0^\infty \left\{ 32\alpha^2 \mu_2/\mu_1 (1+\kappa_1) \left[e^{-3\alpha h} (-1+\alpha h) + e^{-\alpha h} (1+\alpha h) \right] \right\} / \Delta \left\{ \cos \alpha(t-x) \right\} d\alpha, \quad (11)$$

Sınır şartlarının geçerli kalması yani tabakanın elastik yarı sonsuz ortamdan ayrılmaması için (11) nolu denklemin her zaman sıfırdan küçük değerler alması gerekir. İlk ayrılma yükü λ_{cr} ve ilk ayrılma uzaklığı x_{cr} aşağıdaki eşitlik yardımıyla bulunmuştur.

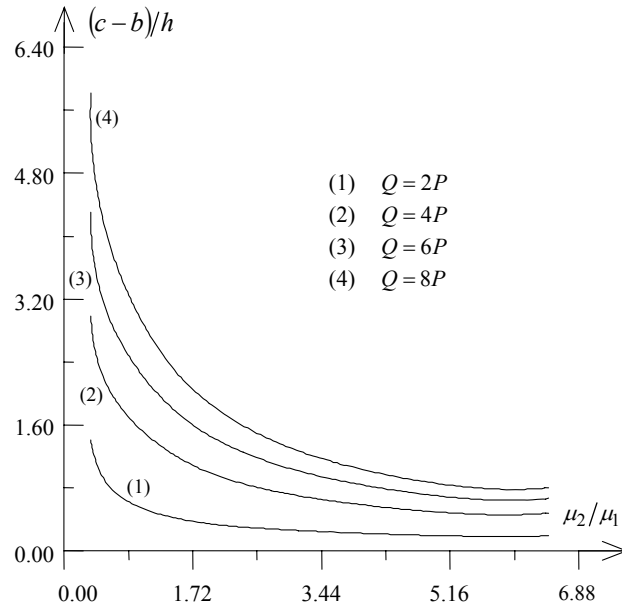
$$\frac{\sigma_{y_1}(x,0)}{P/h} = 0 \quad (12)$$

3. SONUÇLAR

Problemin çözümünde uygun Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri kullanılmış, elastik tabaka ile elastik yarı sonsuz ortam arasında ilk ayrılmayı meydana getiren yük, ilk ayrılma uzaklıklarının yanı sıra birinci bloğun elastik tabakadan ayrılmadan ikinci bloğa ne

kadar yakın olabileceği ile blokların artık etkileşimde bulunmadığı uzaklıklar $(b-a)/h$, $(d-c)/h$, Q/P , μ_2/μ_1 , λ ve $(c-b)/h$ gibi parametrelere bağlı olarak belirlenmiş, bulunan değerler aşağıda tablo ve grafikler halinde sunulmuştur. Q/h nin her zaman P/h ya eşit yada ondan büyük olduğu kabul edilmiştir.

Şekil 2. de Q/h nin farklı değerleri için birinci blok altında ayrılmanın başlamasına sebebiyet veren kritik uzaklığın $((c-b)/h)$ malzeme özelliği μ_2/μ_1 ile değişimi verilmiştir. $(c-b)/h$ 'nin bu kritik değerinde birinci bloğun b/h kenarında temas gerilmesi $P(x)h/P$ 'nin değeri sıfırdır. Şekilden de görüldüğü gibi μ_2/μ_1 arttıkça, yani elastik tabakanın rijitliği yarı sonsuz ortama göre arttıkça, birinci bloğu tabakadan ayırmak daha zor olmaktadır. Q/h arttıkça birinci blok ile tabaka arasında ayrılma olmaması için ise iki blok arasındaki uzaklık artırılmalıdır.



Şekil 2. Birinci blok altında ayrılma meydana gelmeden bloklar arasında olabilecek en yakın uzaklığın farklı Q değerleri için μ_2/μ_1 ile değişimi ($a/h=3$, $(b-a)/h=1$, $(d-c)/h=1$).

Tablo1. İki blok arasındaki etkileşimin son bulunduğu uzaklığın $((c-b)/h)$ blok genişlikleri $(b-a)/h$ ve $(d-c)/h$ ile değişimi ($Q=4P$, $\mu_2/\mu_1=0.36$, $a/h=3$).

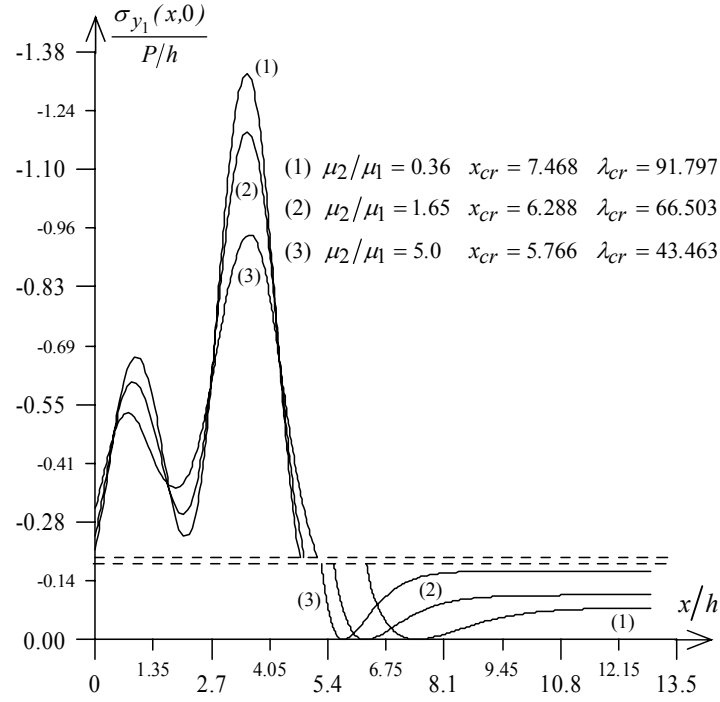
$\frac{(b-a)}{h}$	$\frac{(d-c)}{h}$	$\frac{(c-b)}{h}$	BLOK I		BLOK II	
			$\lambda_{cr_{sol}} = \lambda_{cr_{sağ}}$	$\frac{(a-x_{cr_{sol}})}{h} = \frac{(x_{cr_{sağ}}-b)}{h}$	$\lambda_{cr_{sol}} = \lambda_{cr_{sağ}}$	$\frac{(c-x_{cr_{sol}})}{h} = \frac{(x_{cr_{sağ}}-d)}{h}$
0.5	1.5	11.4729	158.2221	3.642	54.0767	3.391
0.5	1.0	11.6431	158.4436	3.640	48.9311	3.459
0.5	0.5	11.8479	158.5702	3.640	45.8572	3.602
1.0	1.0	11.2908	165.9662	3.470	48.9244	3.459
1.5	1.5	10.6821	176.2471	3.421	54.0838	3.393

İki blok arasındaki uzaklık belirlenen bir limit değerden büyük olduğunda blokların beraberce incelenmesine gerek kalmamaktadır. Bu durumda her blok ayrı bir problem olarak incelenebilir. Farklı Q/h değerleri için iki blok arasındaki etkileşimin son bulunduğu uzaklığın $((c-b)/h)$, blok genişlikleri $(b-a)/h$ ve $(d-c)/h$ ile değişimi de Tablo 1.' de verilmiştir. Birinci blok genişliği sabit tutulup ikinci blok genişliği arttırılırsa bloklar arasındaki etkileşimin son bulması daha kısa bir mesafede olmaktadır. Her iki blok genişliği birden arttırılırsa bloklar arasındaki limit uzaklık $(c-b)/h$ azalmaktadır. Tablo 1.' den de görüldüğü gibi blok genişliklerindeki artış ilk ayrılma yükü λ_{cr} ' de artışa sebep olurken, ilk ayrılma uzaklıkları x_{cr} de blok kenarlarına yaklaşmaktadır.

Tablo 2. Kritik yük faktörü (λ_{cr}) değerlerinin bloklar arasındaki uzaklıkla $((c-b)/h)$ değişimi ($Q = 2P$, $\mu_2/\mu_1 = 1.65$, $a/h = 3$, $(b-a)/h = 1$, $(d-c)/h = 1$).

$(c-b)$ h	BLOK I				BLOK II			
	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sol}}$	$\lambda_{cr_{sağ}}$	$x_{cr_{sağ}}$	$\lambda_{cr_{sol}}$	$x_{cr_{sol}}$	$\lambda_{cr_{sağ}}$	$x_{cr_{sağ}}$
0.5	86.4843	0.7955					61.6381	7.7679
1	105.5191	0.7538					64.4863	8.2798
3	131.2629	0.6863					68.1769	10.2961
5	133.3809	0.6891	48.3705	6.5977	48.3705	6.5977	68.4457	12.2952
6	133.4365	0.6912	59.7812	7.6306	59.7812	7.6306	68.4507	13.2947
7	133.2261	0.6929	117.4795	6.3808	66.2849	8.6937	68.4215	14.2942
8.4183	132.6267	0.6977	132.6267	6.2957	68.3435	10.1298	68.3435	15.7063

Tablo 5.' de λ_{cr} kritik yük faktörü değerlerinin bloklar arasındaki uzaklıkla değişimi görülmektedir. Tabloda $(c-b)/h$ ' nın küçük değerleri için $((c-b)/h < 5)$ λ ' ya bağlı olarak iki ayrılma bölgesi olabilmektedir. Daha öncede ifade edildiği gibi $Q/h \geq P/h$ olduğundan ilk ayrılma ikinci bloğun sağ tarafında olmaktadır. Bu durumda eğer λ yeterince büyük olursa ($(c-b)/h = 0.5$ için $\lambda > 86.4843$) elastik tabaka ile elastik yarı sonsuz ortam arasındaki ikinci ayrılma bölgesi birinci bloğun sol tarafında meydana gelmektedir. Tabakalar arasındaki uzaklık $(c-b)/h$ daha da arttırılırsa bloklar arasında bir ayrılma bölgesi daha ortaya çıkmaktadır. Bu bölge muhtemel ilk ayrılma bölgesidir. Tabakalar arasındaki uzaklık arttırılmaya devam edildiğinde yük faktörü λ ' ya da bağlı olarak dört ayrılma bölgesi ortaya çıkmaktadır. İlk ayrılma bölgesi ikinci blok yakınlarındadır. $(c-b)/h$ ' nın belirli bir değerinden sonra bloklar arasındaki etkileşim kaybolmaktadır. Q/P , μ_2/μ_1 , $(b-a)/h$ ve $(d-c)/h$ nın sabit değerleri için bu değer $(c-b)/h = 8.4183$ olarak belirlenmiştir. Tablodan bloklar arasındaki uzaklık arttıkça ilk ayrılma yükünün arttığı ve sabit bir değere doğru yaklaştığı görülmektedir.



Şekil 3. Elastik tabaka ile elastik yarı sonsuz ortam arasındaki $\sigma_{y_1}(x,0)h/P$ gerilme dağılışının malzeme özelliği μ_2/μ_1 ile değişimi ($Q = 2P$, $a/h = 1.5$, $(b-a)/h = 1$, $(d-c)/h = 1$, $(c-b)/h = 1.5$).

$\sigma_{y_1}(x,0)h/P$ gerilme dağılışının malzeme sabiti μ_2/μ_1 ile değişimi Şekil 3.'de verilmiştir. Elastik tabakanın rijitliğinin elastik yarı sonsuz ortama göre giderek artması durumunda ilk ayrılma uzaklığı y eksenine yaklaşmakta, ilk ayrılmayı meydana getiren yük faktörü λ_{cr} de küçülmektedir. $\sigma_{y_1}(x,0)h/P$ gerilme dağılışı incelendiğinde gerilmelerin rijit bloğun bulunduğu bölgelerde daha büyük değerler aldığı görülmektedir. Daha sonra gerilme değerleri dış yükün etkisinin giderek azalması ve kaybolması ile iyice küçülmekte ve $x > x_{cr}$ olduğu bölgede artarak kütle kuvvetine eşit olmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Dhaliwal, R.S., "Punch Problem for an Elastic Layer Overlying an Elastic Foundation" International Journal of Engineering Science 8 273-288, 1970.
- [2] Adams, G.G., Bogy, D.B., "The Plane Solution for the Elastic Contact Problem of a Semi-Infinite Strip and Half Plane" Journal of Applied Mechanics 43 603-607, 1976.
- [3] Gladwell, G.M.L., "On Some Unbonded Contact Problems in Plane Elasticity Theory" Journal of Applied Mechanics 43 263-267, 1976.
- [4] Geçit, M.R., Gökpinar, S., "Frictionless Contact Between an Elastic Layer and a Rigid Rounded Support" Arabian Journal of Science and Engineering 10(3) 243-251, 1985.

- [5] Klarbring, A., Mikelić, A., Shillor, M., “The Rigid Punch Problem with Friction” *International Journal of Engineering Science* 29(6) 751-768, 1991.
- [6] Jaffar, M.J., “Frictionless Contact Between an Elastic Layer on a Rigid Base and a Circular Flat-Ended Punch with Rounded Edge or a Conical Punch with Rounded Tip” *International Journal of Mechanical Science* 44 545-560, 2002.
- [7] Keer, L.M., Dundurs, J., Tsai, K.C., “Problems Involving a Receding Contact Between a Layer and a Half Space” *Journal of Applied Mechanics* 39 1115-1120, 1972.
- [8] Civelek, M.B., Erdogan, F., “The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer” *International Journal of Solids Structures* 10 639-659, 1974.
- [9] Geçit, M.R., “The Axisymmetric Double Contact Problem for a Frictionless Elastic Layer Indented by an Elastic Cylinder” *International Journal of Engineering Science* 24(9) 1571-1584, 1986.
- [10] Comez, I., Birinci, A., Erdol, R., “Double Receding Contact Problem for a Rigid Stamp and Two Elastic Layers” *European Journal of Mechanics A/Solids* 23 301-309, 2004.
- [11] Geçit, M.R., Erdogan, F., “Frictionless Contact Problem for an Elastic Layer Under Axisymmetric Loading” *International Journal of Solids Structures* 14 771-785, 1978.
- [12] Cakiroglu, A.O., Cakiroglu, F.L., “Continuous and Discontinuous Contact Problems for Strips on an Elastic Semi-Infinite Plane” *International Journal of Engineering Science* 29(1) 99-111, 1991.
- [13] Birinci, A., Erdol, R., “Continuous and Discontinuous Contact Problem for a Layered Composite Resting on Simple Supports” *Structural Engineering and Mechanics* 12(1) 17-34, 2001.
- [14] Birinci, A., Erdol, R., “A Frictionless Contact Problem for Two Elastic Layers Supported by a Winkler Foundation” *Structural Engineering and Mechanics* 15(3) 331-344, 2003.
- [15] Erdogan, F., Gupta, G.D., “On the Numerical Solution of Singular Integral Equations” *Quarterly Journal of Applied Mathematics* 29 525-534, 1972.
- [16] Muskhelishvili, N.I., “Singular Integral Equations” Noordhoff, Groningen-1958.

